766. 可附番無限個ノ可能ナ狀態ニ關スル Markov 過程(2)

吉田　耕作（阪大）

[オ断リ] 前談話ヲ書イタ時ニハ良イ積リダッタノデスが，後カラ述ベル $\boxed{\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}>0}$ ノ証明ニ関スル筆者ノ方針デハ不十分ナコトが角谷君ノ御注意デワカッタ。（本談話ノ最後ヲミラレタイ） 角谷君が色々文献ヲシラベテ結局 additive number theory ニ於ケル A. Khintchine ノ定理ヲ使ヘバ $\boxed{\lim p_{ij}^{(n)}>0}$ が云ヘルコトヲ考ヘ出シテ下サッタ。本号ノ角谷君ノ談話ヲミラレタイ。Kolmogoroff 自身相当頁ヲ費シテ証明シテルコトデスカラ相当難カシイ事ダッタ譯デシタ。(1)

§4. Lemma 3 及ビ其應用

[Lemma 3] 点 x_i が l 単位時間後ニハ点 x_j ニ来ズ且 $(l+1)$ 単位時間後ニハ点 x_j ニ来ル確率ヲ $K_{ij}^{(l+1)}$，点 x_i が l 単位時間後ニモ亦 $(l+1)$ 単位時間後ニモ点 x_j ニ来ズ且ツ $(l+2)$ 単位時間後ニハ点 x_j ニ来ル確率ヲ $K_{ij}^{(l+2)}$ トスル。

---

(1) 尚前談話 763, P.17, 第2行目 $y\to x$ ハ $y\not\to x$ ノ誤リデス。同ジク 6 行目，ナラヌカラ．ノ次ニ 従ッテ 時ニ $x_t\in A_{it}$ ヲ補ヒマス。同ジク 10 行目，矛盾ノ前ニ $x_t\in A_{it}$ トヲ補ヒマス。斯ク補ヘバワカリヨイデスカラ。

以上同様ニシテ $K_{ij}^{(l+m)}$ ヲ定義スレバ $(l, m=1,2,\cdots)$[1]

(i) $$0 \leqq p_{ij}^{(l)} + K_{ij}^{(l+1)} + K_{ij}^{(l+2)} + \cdots\cdots + K_{ij}^{(l+m)} \leqq 1$$

(ii) $$p_{ij}^{(l+m)} = p_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(m)} + K_{ij}^{(l+1)} p_{jj}^{(m+1)} + K_{ij}^{(l+2)} p_{jj}^{(l+2)} + \cdots$$
$$\cdots\cdots + K_{ij}^{(l+m-1)} p_{jj}^{(1)} + K_{ij}^{(l+m)}$$

証明： 明カ。

$\boxed{系1}$ 或 j ニ對シテ $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}$ が存在スレバ，任意ノ i ニ對シ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ が存在スル。

証明： (1)，(2) ニ於テ $l=0$ ト置ケバ $(p_{ij}^{(0)}=0)$ ヨイ：<u>Toeplitz ノ summation</u>.

$\boxed{系2}$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} > 0$ ナラバ $\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}$ が存在スル。

証明： $\overline{\lim}_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \alpha > \underline{\lim}_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \beta > 0$ トシテ矛盾ヲ出ス。

任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ $p_{jj}^{(s)} \leqq \alpha + \varepsilon$ for $s \geqq s_0$ ナル如

---

(1) Kolmogoroff: loc. cit. ノ冒頭ニ(ii)式ノ $l=1$ ナル場合が出テヰル。筆者ハ之カラ以下ノ所論ヲ思ヒツイタ譯デスが，Kolmogoroff ノ露語ノ論文（精シク証明シタ奴）ヲ調ベテミルト，ハッキリワカリマセンがドウヤラ(i)，(ii) ヲ使ッテル様デス。併シ Kolmogoroff ハ之ヲ出発点トシテ色々結果ヲ出シタ上デ mean sojourn ノ存在ヲ出シタリシテル様ナノデ行キ方ハ全然チガフワケデス。

キ s_0 ガトレル。 m_0 ヲ s_0 ヨリ大キイモノデ $p_{jj}^{(m_0)} \leqq \beta+\varepsilon$ ナル如キモノトスル。然ラバ (ii) ヨリ

$$p_{jj}^{(l+m_0)} \leqq p_{jj}^{(l)}(\beta+\varepsilon) + \left\{ K_{jj}^{(l+1)} p_{jj}^{(m_0-1)} + K_{jj}^{(l+2)} p_{jj}^{(m_0-2)} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + K_{jj}^{(l+m_0-s_0)} p_{jj}^{(s_0)} \right\}$$

$$+ \left\{ K_{ji}^{(l+m_0-s_0-1)} p_{jj}^{(s_0-1)} + K_{jj}^{(l+m_0-s_0-2)} p_{jj}^{(s_0-2)} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + K_{jj}^{(l+m_0-1)} p_{jj}^{(1)} + K_{jj}^{(l+m_0)} \right\}$$

所ガ (i) ニヨリ l_0 ヲ充分大キクトレバ $\sum\limits_{k=l_0+m_0-s_0-1}^{\infty} K_{jj}^{(k)} < \varepsilon$. 従ッテ $l \geqq l_0$ ナラ，(i) ニヨリ

$$p_{jj}^{(l+m_0)} \leqq p_{jj}^{(l)}(\beta+\varepsilon) + (1-p_{jj}^{(l)})(\alpha+\varepsilon) + \varepsilon$$

$= p_{jj}^{(l)}(\beta-\alpha) + \alpha + 2\varepsilon$. コノトキ尚 l ヲ充分大キクトレバ ($l \geqq l_1 \geqq l_0$) $p_{jj}^{(l)} \geqq \beta - \varepsilon$. 従ッテ

$$\alpha = \overline{\lim_{l\to\infty}}\, p_{jj}^{(l+m_0)} \leqq (\beta-\varepsilon)(\beta-\alpha) + \alpha + 2\varepsilon.$$

ε 任意ダッタカラ之レヨリ $0 \leqq \beta(\beta-\alpha)$ ヲ得テ $0 < \beta < \alpha$ ニ矛盾スル。以上。

§5. *final set* ノ中ノ運動

§3 迄ニ述ベタコトニヨッテ *final set* ハ高々可附

無限個ノ点 $y_1, y_2, \cdots\cdots$ ヨリ成リ且ツ遷移確率 p_{ij}（点 y_i ヨリ単位時間後ニ点 y_j ニ移ル）ハ次ノ條件ヲ満足スル。

(iii) 任意ノ i, j ニ対シ適当ニ m ヲトレバ $p_{ij}^{(m)} > 0$

(iv) 任意ノ i, j ニ対シ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = K_j$（$i$ ニ無関係）ガ存在シ且ツ K_j 全テ 0 デ $\sum\limits_j K_j = 1$

$\boxed{\text{定理2}}$ 上ノ如キ *homogeneous* ナ *Markov* 過程ハ次ノ意味デ <u>*periodic*</u> デアル：

整数 $d \geqq 1$ ガ存在シ $R = (y_1, y_2, \cdots\cdots)$ ガ d 個ノ部分集合 $R_1, R_2, \cdots\cdots, R_d, R_{d+1} = R_1$ ニ分解シ

(v) $y_i \in R_s$ ナラ $\sum\limits_{y_j \in R_{s+1}} p_{ij} = 1$ $\quad (s = 1, 2, \cdots\cdots, d, d+1 = 1)$

(vi) R_s ハ遷移確率 $P_{ij} = p_{ij}^{(d)}$ ニ関シテ *final set* ニナリ且ツ任意ノ $y_i, y_j \in R_s$ ニ対シテ $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = M_j$（$i$ ニ無関係）ガ存在シ, $M_j > 0$, $\sum\limits_{y_j \in R_s} M_j = 1$

$(s = 1, 2, \cdots\cdots, d, d+1 = 1)$

§6. 定理2ノ証明

$\boxed{d\text{ ヲ決定スルコト}}$ $p_{jj}^{(n)} > 0$ ナル如キ n 全体ノ集合ヲ $\mathfrak{N}_j$ トスル。(iii) ヨリ $\mathfrak{N}_j \neq$ 空集合デアル。$n, m \in \mathfrak{N}_j$ ナラバ $p_{jj}^{(n+m)} \geqq p_{jj}^{(n)} p_{jj}^{(m)} > 0$ トナルカラ $(n+m) \in \mathfrak{N}_j$.

$\mathfrak{N}_j$ ニ属スル全テノ正整数ノ<u>最大公約数</u>ヲ d_j トスルト d_j

ハ j ニ無関係デアル。　以下共ノ証明。(iii) ニヨリ

$p_{ij}^{(k)}>0$, $p_{ji}^{(l)}>0$ ナル如キ k, l ガ存在スル。

$p_{ii}^{(k+l)} \geqq p_{ij}^{(k)} p_{ji}^{(l)}>0$ 及ビ $p_{jj}^{(k+l)} \geqq p_{ji}^{(l)} p_{ij}^{(k)}>0$ ヨリ

$(k+l) \in \mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{N}_j$. 即チ $(k+l)$ ハ d_i デモ d_j デモ約

セル。又 $p_{ii}^{(k+s+l)} \geqq p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(s)} p_{ji}^{(l)}>0$ for $s \in \mathfrak{N}_j$ カラ

$(k+l)+s \in \mathfrak{N}_i$ for $s \in \mathfrak{N}_j$. 又同様ニシテ

$(k+l)+s \in \mathfrak{N}_j$ for $s \in \mathfrak{N}_i$ ヲ得ル。故ニ $d_i=d_j$ デ

ナケレバナラナイ。コノ $d_i=d$ トトル。　　　　以上

$\boxed{\text{R ノ分割}}$　$p_{ij}^{(n)}>0$ 且ツ $p_{ij}^{(m)}>0$ ナラバ $n \equiv m$ $(\bmod\ d)$ デアル。　何者，(iii) ニヨリ $p_{ji}^{(k)}>0$ ナル如キ

k ガアル。故ニ $p_{ii}^{(n+k)} \geqq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(k)}>0$ ヲ得テ $n+k \equiv 0$ $(\bmod\ d)$. 同ジク $m+k \equiv 0 \ (\bmod\ d)$ ヲ得ルカラ $n \equiv m \ (\bmod\ d)$.

故ニ i_0 ニ對シテ $p_{i_0 j}^{(n)}>0$ ナラバ $n \equiv 1,2,\cdots\cdots,d$ $(\bmod\ d)$ ノ何レカ唯一ツガ成立ツ。 i_0 ニ對シ $p_{i_0 j}^{(n)}>0$, $n \equiv \beta(j) \ (\bmod\ d)$ [(1)] ノ成立ツ ヨウナ y_j ノ集合ヲ R'_β ト

スルト $R=\sum_{\beta=1}^{d} R'_\beta$ ニ分解スル。 $y_i \in R'_\beta$, $y_j \in R'_\gamma$ トスル。

$p_{ij}^{(m)}>0$, $p_{i_0 i}^{(n)}>0$ トスレバ $p_{i_0 j}^{(n+m)} \geqq p_{i_0 i}^{(n)} p_{ij}^{(m)}>0$.

$n \equiv \beta \ (\bmod\ d)$ ト $n+m \equiv \gamma \ (\bmod\ d)$ ガ成立ツカラ

---

(1)　$\beta(j)=1,2,\cdots\cdots,d$

$m \equiv \gamma - \beta \pmod d$.

即チ $y_i \in R'_\beta$ ナラバ $m \equiv \gamma - \beta \pmod d$ 又ハ $m \not\equiv \gamma - \beta$ (mod) ニ従ッテ

$$\sum_{y_j \in R'_\gamma} p_{ij}^{(m)} = 1 \quad \text{又ハ} \quad \sum_{y_j \in R_\gamma} p_{ij}^{(m)} = 0$$

一方 (iii) ニヨリ $\sum_j p_{ij}^{(m)} \equiv 1$ (i, m ニ對シテ) ダカラ適當ニ番号ヲ附ケテ ($R_s = R'_{\beta_s}$) (V) ガ得ラレル。

$\boxed{R_s \text{ ノ性質}}$ R_s ハ $P_{ij} = p_{ij}^{(d)}$ ニ関シテ final set ニナッテヰル。R_s ノ作リ方カラ $n \not\equiv 0 \pmod d$ ナラバ

$$p_{ij}^{(md+n)} = 0 \qquad (m = 1, 2, \cdots\cdots ;\ y_i, y_j \in R_s).$$

故ニ $K_j = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} p_{ij}^{(k)} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{dh} \sum_{k=1}^{h} p_{ij}^{(kd)} > 0.$

残ル所ハ (VI) ノ証明デアルガ，之ハ Lemma 3 ノ系 1，系 2 ニヨリ，$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} > 0$ for $y_j \in R_s$，ト云ヘルトヨイ。斯クシテ我々ノ証明スベキコトハ結局次ノ問題ニ reduce サレタ。

Markov 過程 P_{ij} ニ於テ

(α) 任意ノ i, j ニ對シ適當ニ $m = m(i, j)$ ヲトルト $P_{ij}^{(m)} > 0$.

(β) 任意ノ i, j ニ對シ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_{ij}^{(m)}$ ガ存在シ

i ニ無関係.

且ツ之ヲ M_j トヲクト $M_j>0$, $\sum_j M_j=1$.

(γ) 任意ノ j ニ對シ $P_{jj}^{(n)}>0$ ナル如キ n 全体ノ最大公約數 = 1

ガ満足サレテヲルトキ任意ノ j ニ對シ $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}>0$ トナル?

(γ) カラ, j ヲ與ヘタトキ充分大キナ n 全テニ對シテ $p_{jj}^{(n)}>0$ ガ得ラレル。又 $i=j$ ナルトキノ (β) カラ $p_{jj}^{(n)}\geq\frac{M_j}{2}$ ナル如キ n ノ集合ノ density ガ positive ナコトガ出テクル。之ニツカラタヤスク $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}>0$ ガ出ル積リダッタノデスガ, additive number theory ヲ必要トスルコトヲ角谷君ガ注意セラレタノデアッタ。classical ナ確率論ガ順列組合セヲ武器トシタ如ク現代的ナ確率論ニ高次ノ順列組合論トモ云フベキ(?) additive number theory ヲ使フノハ何ノ不思議モナイ訳デアル。併シ折角最後ノ瞬間迄初等的ニ議論デキタノダカラ若シ Khintchine ノ定理ヲ使ハズニ済メバ之ニ越シタコトハナイ譯デスガ.